

# **Zur Stabilität von geklebten und geklotzten Glasscheiben: Beurteilung der Dunkerley'schen Geraden zur Beulwertbestimmung**

*L. Neumann, A. Arnold, W. Hochhauser*

## **Zusammenfassung**

Mithilfe der jungen Hybridbauweise geklebter und geklotzter Holz-Glas-Verbundscheiben können heute vor allem Leichtbaukonstruktionen effizient ausgesteift werden. Der bisher vornehmlich füllende Baustoff Glas wird durch ein neuartiges Konstruktionsprinzip zum Horizontallastabtrag über gläserne Schubfelder und gläserne Druckdiagonalen herangezogen - konventionelle Aussteifungsmaßnahmen wie Windverbände werden abkömmlich. Der Stabilitätsnachweis der Glasscheibe, einer der wesentlichsten im Rahmen der Bemessung aussteifender Holz-Glas-Verbundscheiben, bedingt die Kenntnis des Beulwerts der Glastafel. Infolge der Überlagerung zweier Tragmechanismen in einer Scheibe sind auch die lasteinleitungsabhängigen Beulwerte zu superponieren. Dies kann approximativ über die lineare Interaktionsbeziehung der Dunkerley-Geraden erfolgen, deren Berechnungsunschärfe im ersten Hauptteil analysiert und bewertet wird. Im zweiten Hauptabschnitt wird der Nachweis erbracht, dass dieses Näherungsverfahren für vorliegendes Problem stets eine Berechnungsmethode auf der sicheren Seite liefert. Bislang war dies nämlich nur stillschweigend als bekannt und „klar“ vorausgesetzt worden.

## **On the stability of glued and embedded glass panes: Evaluation of the Dunkerley straight line for the calculation of buckling coefficients**

### **Abstract**

Lightweight structures can nowadays be stiffened efficiently by means of glued and embedded timber-glass composite panes. So far, glass has been mainly a filling building material. But a novel construction principle enables load transfer of horizontal forces via vitreous shear areas and compression diagonals within the glass. Hence, conventional stiffening methods such as wind bracings become dispensable. The glass panes stability proof, one of the most important proofs within the sizing of stiffening timber-glass composite panes, presupposes the identification of the glass panes buckling coefficient. Due to the superposition of two bearing mechanisms within one pane, the buckling coefficients depending on the way of load application have to be superimposed too. This can be carried out approximatively via the linear interaction correlation of the Dunkerley straight line, whose calculation inaccuracies are analyzed and evaluated in the first main chapter. In the second main chapter it is proven that the Dunkerley straight line represents a conservative calculation method for the present problem. So far, this fact was assumed to be known and "obvious", but a rigorous justification was missing.

## **Autorenangaben**

### **Mag. Dr. rer. nat. Lukas Neumann, BSc**

Universität Innsbruck  
Institut für Mathematik  
Technikerstraße 13, A-6020 Innsbruck  
lukas.neumann@uibk.ac.at

### **Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Anton Arnold**

Technische Universität Wien  
Institut für Analysis und Scientific Computing  
Wiedner Hauptstraße 8, A-1040 Wien  
arnold@asc.tuwien.ac.at  
Förderung: FWF-Projekt I 395-N16

### **Dipl.-Ing. Dr.techn. Werner Hochhauser**

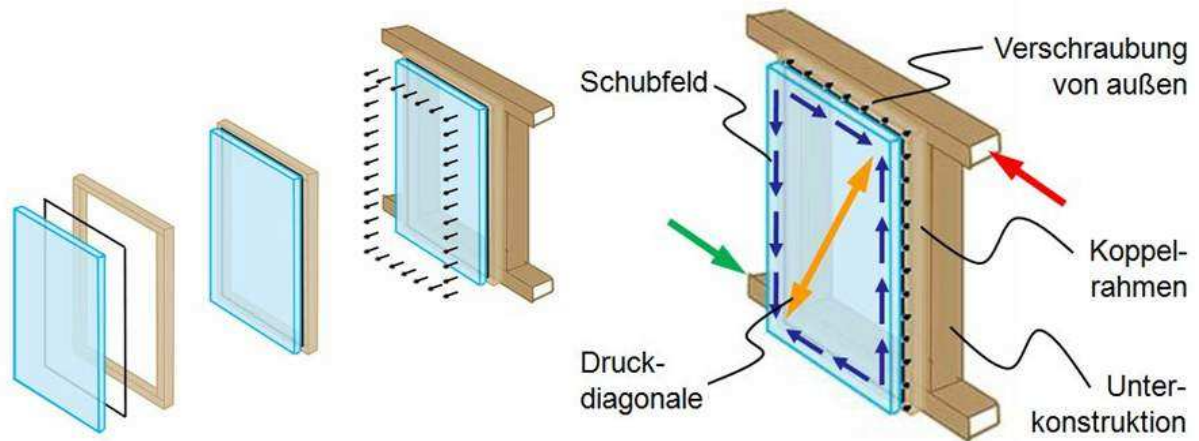
Technische Universität Wien  
Institut für Architekturwissenschaften  
Abteilung Tragwerksplanung und Ingenieurholzbau  
Karlsplatz 13 / 259-2, A-1040 Wien  
hochhauser@iti.tuwien.ac.at

## **1 Einleitung**

In der Architektur werden zunehmend transparente Bauteile eingesetzt, die als Zwei- oder Dreifach-Isolierverglasungen von außen auf die Tragstruktur aufgebracht werden, um den Energiegewinn aus Sonneneinstrahlung zu erhöhen. Aber auch im Innenausbau oder modernen Bürobau kommen vermehrt gläserne Trennwände zum Einsatz. Die zeitgenössische Architektur thematisiert die Entmaterialisierung - Transparenz und Transluzenz stehen im Vordergrund, Ansichtsbreiten von Pfosten-Riegelkonstruktionen werden verschmälert. Dies führt bei allen Leichtbaustoffen - aber insbesondere beim nachwachsenden Rohstoff Holz - zu einer Reduktion des ohnehin geringen Aussteifungspotentials, dem üblicherweise mit Windverbänden, eingespannten Stielen oder biegesteifen Rahmenecken erfolgreich begegnet werden kann.

Die Glasbauteile selbst werden trotz ihrer vergleichsweise hohen Druck-, Schub- und Drillsteifigkeit aufgrund fehlender normativer Grundlagen erst seit kurzem und nur in Ausnahmefällen durch Einkleben in die Rahmenkonstruktion baupraktisch zum Horizontallastabtrag herangezogen ([1]).

Die Technische Universität Wien – Abteilung Tragwerksplanung und Ingenieurholzbau – entwickelte in den vergangenen drei Jahren unter der Leitung von Prof. Winter und in enger Kooperation mit der Holzforschung Austria neben geklebten Holz-Glas-Verbundplatten und -trägern auch eine Konstruktionsweise sowie einen zugehörigen, normreifen Berechnungs- und Bemessungsvorschlag für verklebte Holz-Glas-Verbundscheiben, um Gebäude und Zubauten wie Wintergärten künftig mittels Glas aussteifen zu können. Dabei wird die von *Structural Sealant Glazings* bekannte umlaufende Schubverklebung, welche bereits in [1], [2] oder auch [3] angewendet wurde, um die aus dem Fensterbau bekannten Klotzungen erweitert. Eine Überlagerung statisch wirksamer Schubfelder und gläserner Druckdiagonalen (Bild 1) ermöglicht damit den effizienten Lastabtrag angreifender Horizontalkräfte.



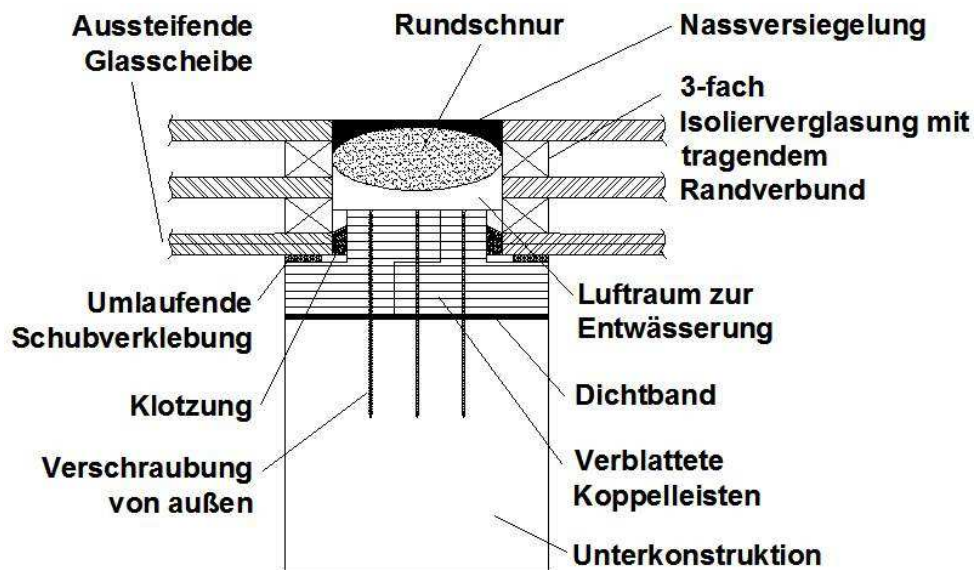
**Bild 1. Herstellung ([4]) und überlagerte Tragmechanismen: Schubfeld und Druckdiagonale**

Fig. 1. Assembling ([4]) and superimposed mechanisms: shear area and compression diagonal

Der Grad der Vorfertigung nimmt im Bauwesen eine immer bedeutendere Rolle ein, ergeben sich doch aus der Bauzeit entscheidende Einflüsse auf die Baukosten. Mit der Trennung von Aussteifungseinheit, bestehend aus im Werk verklebten Glasscheiben mit den Koppelrahmen aus Birkenfurniersperrholz oder Glasfaserverstärkten Kunststoffen, und Tragkonstruktion (vgl. [4]) kann dem klassischen Elementbau nachgekommen werden. Die Aussteifungseinheit - die Verbundscheibe aus Holz und Glas - wird im Werk staubfrei gefertigt und kann später auf der Baustelle analog zu OSB-Bepunktungen auf eine beliebige Unterkonstruktion aufgeschraubt werden (vgl. Bild 1).

Dieser entwickelten Konstruktionsweise liegt ein unkompliziertes Anschlussdetail (Bild 2) zugrunde, dessen einfache Ausführung auf ähnlichen Wärmeausdehnungskoeffizienten von Holz und Glas fußt. Beide Ausgangsstoffe bieten einander damit dieselben fundamentalen Voraussetzungen für einen gemeinsamen Verbund ohne tiefgreifender kompositinhärenter Zwänge, wie Beton und Stahl, deren Wärmeausdehnungskoeffizienten sich ebenfalls ähneln. Doch nicht nur das vergleichbare Verhalten unter thermischen Einwirkung scheint vorteilhaft für einen Holz-Glas-Hybridbaustoff zu sein, sondern auch die Tatsache, dass beide Fügepartner en gros die jeweiligen Schwächen des anderen zu kompensieren vermögen: Holz als Bewehrung und umlaufender Kantenschutz für den spröden Baustoff Glas und Glas als Aussteifungselement für Holz.

Sowohl Konstruktionsweise als auch das hierfür abgeleitete Berechnungs- und Bemessungskonzept für Holz-Glas-Verbundscheiben ([5]) wurden im Frühjahr 2011 von der TU Wien zum Patent angemeldet [6].



**Bild 2. Anschlussdetail für geklebte und geklotzte Holz-Glas-Verbundscheiben**

Fig. 2. Joint detail for glued and embedded timber-glass composite panes

Im abgeschlossenen Forschungsprojekt ([5]) zeigte sich bereits im Rahmen der durchgeführten Großprobenversuche das hohe Aussteifungspotential der Verbundscheiben. Für eine Scheibengeometrie von 125 cm Breite und 250 cm Höhe konnten mittlere, horizontal am Kopfriegel angreifende Bruchlasten von bis zu 74,73 kN verzeichnet werden. Einer der dabei dokumentierten Versagensmechanismen, das Beulen der angeordneten Floatglasscheiben, ist in Bild 3 dargestellt.

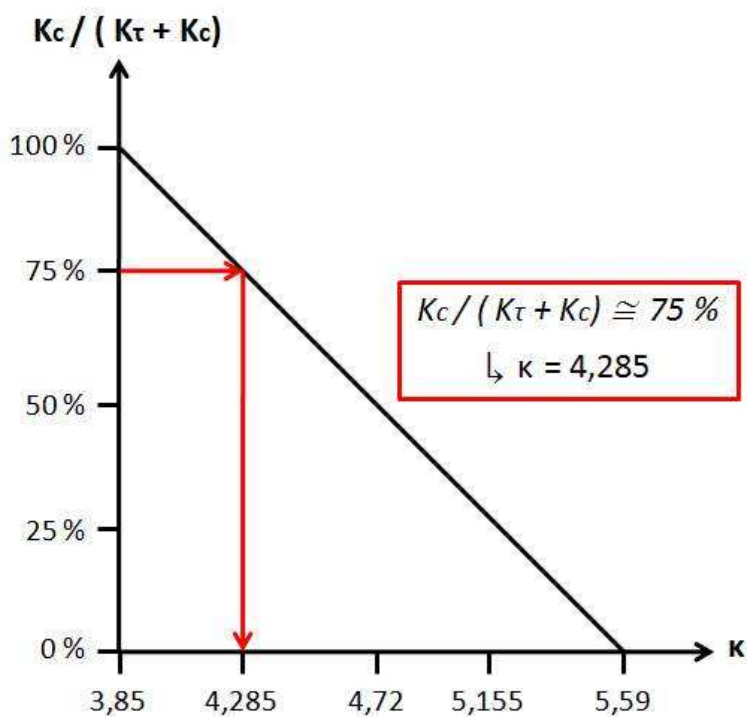


**Bild 3. Momentaufnahme: Beulversagen einer geklebten und geklotzten Glasscheibe ([5])**

Fig. 3. Snap-shot: buckling collapse of a glued and embedded glass pane ([5])

Der diesem Versagensmechanismus zugehörige Stabilitätsnachweis der Glasscheibe, welcher einen der wesentlichen Nachweise in [5] repräsentiert, bedingt die Bestimmung des Beulwerts  $\kappa$ , der neben der Anzahl der Halbwellen in Längs- und Querrichtung, den Randbedingungen und dem Seitenverhältnis der Scheibe in hohem Maße von der Art der Lasteinleitung abhängig ist.

In der Literatur finden sich sowohl Beulwerte für Schubfelder (z.B. in [7]) als auch für diagonal druckbeanspruchte Scheiben ([8]). Für superponierte Beanspruchungen, insbesondere durch un stetige Randbedingungen, werden aber kaum konkrete Beulwerte berechnet. In [9] wird eine Methode zur Lösung durch Fourieransätze diskutiert, für die aber im hier vorliegenden Lastfall keine schnelle Konvergenz zu erwarten ist. Aktuelle Arbeiten zu Lösungen mittels Reihendarstellungen sind zum Beispiel [10] und [11]. Im Rahmen von [5] wurde der überlagerte Beulwert mithilfe der sogenannten Dunkerley-Geraden approximativ bestimmt. Bei Kenntnis der Beulwerte infolge reinem Schub-  $\kappa_\tau$  respektive Druckkrafteintrags  $\kappa_c$  kann die lineare Interaktionsbeziehung der Dunkerley'schen Geraden in Abhängigkeit der TeilstEIFigkeiten der Tragmechanismen Schubfeld  $K_\tau$  und Druckdiagonale  $K_c$  (vgl. [5]) sowie deren Verhältnis zur Bestimmung des resultierenden Beulwerts  $\kappa$  herangezogen werden (Bild 4).



$\kappa_\tau = 5,59$  (Beulwert für Schubbeanspruchung gem. [7])

$\kappa_c = 3,85$  (Beulwert für Druckbeanspruchung gem. [8])

**Bild 4. Anwendungsbeispiel: Dunkerley-Gerade - Bestimmung resultierender Beulwerte ([5])**

Fig. 4. Example of use: Dunkerley straight line - determination of resulting buckling coefficients ([5])

Für Knickstäbe und zusammengesetzte Knickstäbe wurde in [12] das Dunkerley-Theorem formal angewendet, ohne dabei die mathematisch notwendigen Voraussetzungen, insbesondere der vollständigen Stetigkeit, nachzuweisen. In [13] wurde zwar die Anwendbarkeit der Dunkerley'schen Geraden zur Beulwertermittlung geklebter und

geklotzter Glasscheiben studiert und bewertet, eine allgemeingültige Nachweisführung als untere Schranke blieb jedoch (für Flächentragwerke) bislang aus. Dies sei Hauptgegenstand der vorliegenden Ausarbeitung.

## 2 Modell

Untersucht wird das Beulverhalten einer Glasscheibe  $\Omega := [0, a] \times [0, b]$  mit einer Länge von  $a = 2.5$  Metern und einer Breite von  $b = 1.25$  Metern, in die an den Rändern Kraft eingeleitet wird. An den Kanten sei die Platte Navier'sch gelagert - also örtlich fix aber frei drehbar. Die Platte stehe unter dem Einfluss einer Kraft, die sich aus zwei Komponenten zusammensetzt. Einerseits wird die Scheibe via Randverklebung (mit Silikon oder Acrylat) durch ein konstantes Schubfeld belastet. Andererseits wird über Klötze (beispielsweise aus Epoxidharz) Druckkraft in die Scheibe eingeleitet (vgl. Bild 5). Es verbleibt die Frage, in wieweit sich die Beullast des Systems durch eine geeignete Wahl der Steifigkeit der Klötze im Vergleich zur Klebefuge optimieren lässt. Das Problem zerfällt in zwei Unterprobleme.

### 2.1 Spannungen in der Ebene

Zunächst wird aus den Randbedingungen die Spannungsverteilung in der ebenen Platte berechnet. Die Komponenten des Spannungstensors  $\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix}$  genügen, wenn keine Flächenlast auftritt, dem Gleichungssystem

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = 0 . \quad (1)$$

Dabei stehen  $\sigma_x$  und  $\sigma_y$  für die Normalspannungen und  $\tau_{xy}$  für die Scheerspannung. Zusätzlich gilt im Rahmen der linearen isotropen Elastizitätstheorie das Hooke'sche Gesetz

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \end{aligned} \quad (2)$$

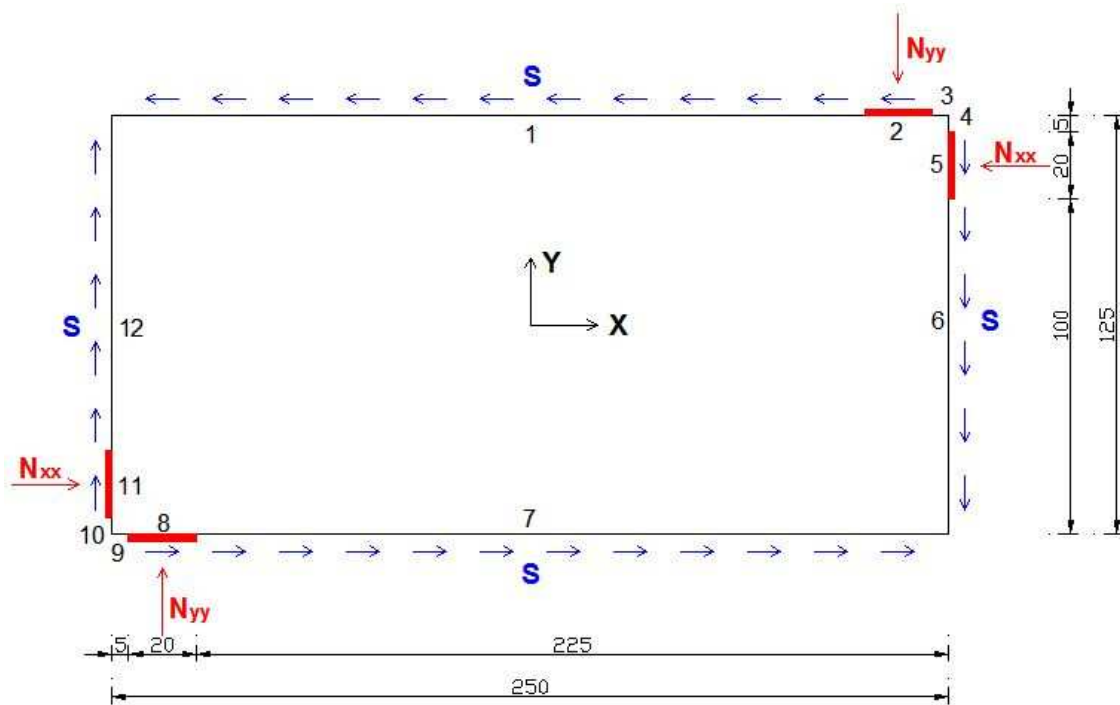
$$\varepsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{xy} ,$$

wobei  $E$  das Elastizitätsmodul und  $\nu$  das Poisson-Verhältnis von Glas angibt. Die Verzerrungen  $\varepsilon$  genügen der Kompatibilitätsbedingung

$$\partial_y^2 \varepsilon_x + \partial_x^2 \varepsilon_y = 2 \partial_{xy} \varepsilon_{xy} . \quad (3)$$

Einsetzen von (2) und (3) in (1) liefert ein elliptisches System für die Komponenten des Spannungstensors.

Die Klötze befinden sich diagonal gegenüber, an der unteren linken und an der oberen rechten Ecke der Scheibe, und haben Längen von jeweils 20 cm. Die genaue Lage kann Bild 5 entnommen werden.



**Bild 5. Darstellung der untersuchten Scheibengeometrie in [cm] ([13])**

Fig. 5. Illustration of the tested pane geometry in [cm] ([13])

Als nächstes werden die Randbedingungen für  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ , die sich durch die Krafteinleitung über Klötze und durch Schub ergeben, betrachtet. Am Rand gilt allgemein

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{t}, \quad (4)$$

wobei  $\boldsymbol{t}$  der Lastvektor ist, und  $\boldsymbol{n}$  für den *äußeren* Normalvektor steht. An allen Kanten gilt infolge des Schubfeldes  $\tau_{xy} = -S$ . An den vertikalen Kanten ist  $\sigma_x$  vorgegeben und an den horizontalen  $\sigma_y$ . Es gilt  $\sigma_x = -N_{xx}$  an den Kanten 5, 11 und  $\sigma_x = 0$  an den anderen vertikalen Kanten,  $\sigma_y = -N_{yy}$  an den Kanten 2, 8 und  $\sigma_y = 0$  an den Kanten 1, 3, 7 und 9. Das Kräftegleichgewicht ist durch die Randbedingungen sichergestellt. Um Drehmomentfreiheit zu erreichen, muss bei obiger Geometrie die Beziehung

$$\int_0^a x[\sigma_y(x,0) - \sigma_y(x,b)] dx = \int_0^b y[\sigma_x(0,y) - \sigma_x(a,y)] dy$$

erfüllt sein. Daraus ergibt sich die lineare Beziehung

$$N_{yy} = \gamma N_{xx} \quad \text{mit} \quad \gamma = \frac{0.575^2 - 0.375^2}{1.2^2 - 1^2} \approx 0.4318, \quad (5)$$

welche in weiterer Folge vorausgesetzt wird.

Da die Gleichungen zur Berechnung des Spannungstensors linear sind, kann das Problem für die Belastung durch das Schubfeld und durch die Klötze getrennt betrachtet werden. Man erhält

$$\boldsymbol{\sigma} = N_{xx} \boldsymbol{\sigma}_N + S \boldsymbol{\sigma}_S, \quad (6)$$

wobei  $\boldsymbol{\sigma}_N$  das System (1)–(3) zu den Randbedingungen  $(N_{xx}, S) = (1, 0)$  löst, und

$$\boldsymbol{\sigma}_S = \text{const} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ die Lösung zu den Randbedingungen } (N_{xx}, S) = (0, 1) \text{ ist.}$$

## 2.2 Beulgleichung

Für bekannten Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  ergibt sich die Auslenkung  $u(x, y)$  der Platte, bei kleinen Auslenkungen, als Lösung der Differentialgleichung

$$\Delta^2 u - \frac{1}{D} (\sigma_x \partial_x^2 u + 2\tau_{xy} \partial_x \partial_y u + \sigma_y \partial_y^2 u) = 0 \quad \text{auf } \Omega. \quad (7)$$

Dabei steht  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  für die Plattensteifigkeit. Die Plattendicke tritt in der Gleichung

nicht auf, da die wirkenden Drücke schon auf die Dicke normiert, also als Kraft pro Länge, gegeben angenommen werden.

Zur Lösung der Gleichung ist die schwache Formulierung besser geeignet. Die zugehörigen Randbedingungen für Navier'sche Lagerung sind  $u = 0$  und  $\Delta u = 0$  auf  $\partial\Omega$ , dem Rand von  $\Omega$ . Unter Ausnutzung der Randbedingungen lässt sich die Gleichung für die Auslenkung (7) schreiben als

$$\int_{\Omega} \Delta u \Delta v \, d(x, y) + \frac{1}{D} \int_{\Omega} (\nabla u)^T \boldsymbol{\sigma} \nabla v \, d(x, y) = 0, \quad \forall v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

In Abschnitt 3 wird gezeigt, dass die Einträge von  $\boldsymbol{\sigma}$  in  $L^2(\Omega)$  sind. Da  $\nabla u$  und  $\nabla v$  im Sobolev Raum  $H^1(\Omega)$  liegen, und  $H^1(\Omega)$  in  $L^4(\Omega)$  einbettet (vgl. [14]), ist das zweite Integral in obiger Gleichung wohldefiniert.

Zur Ausbildung einer Beule kommt es, wenn die Spannungen  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\sigma_y$  so groß werden, dass das Eigenwertproblem

$$-\int_{\Omega} \Delta u \Delta v \, d(x, y) - \frac{1}{D} \int_{\Omega} (\nabla u)^T \boldsymbol{\sigma} \nabla v \, d(x, y) = \lambda \int_{\Omega} uv \, d(x, y), \quad \forall v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \quad (8)$$

eine nichttriviale Eigenfunktion zum Eigenwert 0 zulässt. Das Vorzeichen wurde dabei so gewählt, dass ein positiver Eigenwert einer sich ausbildenden Beule entspricht. Dazu ist zu bemerken, dass die Bilinearform

$$(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(u, v) \mapsto -\int_{\Omega} \Delta u \Delta v \, d(x, y) - \frac{1}{D} \int_{\Omega} (\nabla u)^T \boldsymbol{\sigma} \nabla v \, d(x, y)$$



symmetrisch ist und von oben beschränkt auf der Einheitskugel in  $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ . Damit sind alle Eigenwerte reell und es gibt einen größten Eigenwert. Andererseits ist die Matrix  $\sigma$  typischerweise nicht positiv definit, und damit ist das Vorzeichen der Eigenwerte nicht vorgegeben. Ist die Belastung groß genug, um den größten Eigenwert positiv werden zu lassen, so kommt es zur Ausbildung einer Beule in der Form der zugehörigen Eigenfunktion.

### 3 Numerik

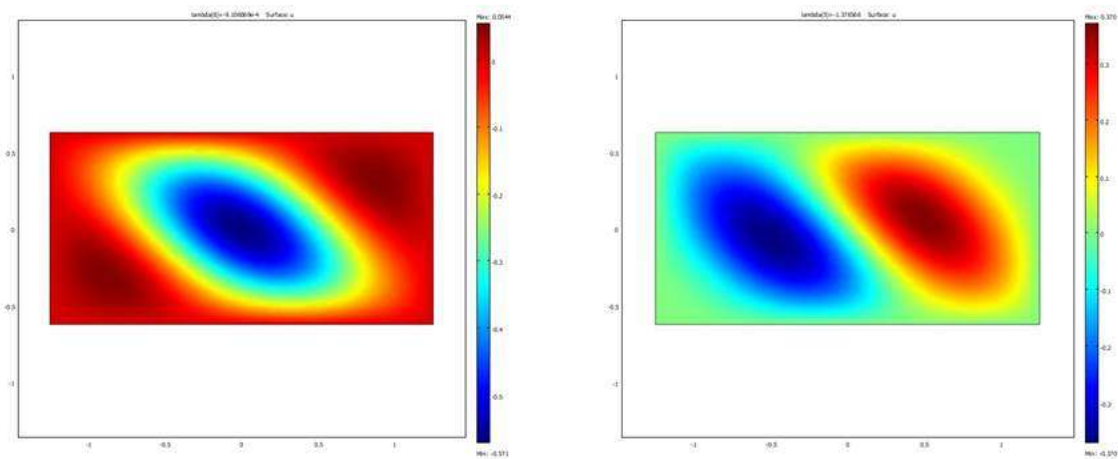
Nachfolgend wird das Gleichungssystem (1)–(3), (8) numerisch mit Hilfe der Finite-Elemente Software COMSOL untersucht. Zur Lösung von (1)–(3) wird der “plain stress” Applikationsmodus von COMSOL benutzt. Dabei wird das Problem in den Verschiebungsvariablen gelöst, und zwar indem die schwache Formulierung diskretisiert, und die potentielle Energie minimiert wird. Es werden quadratische Lagrange Elemente und ein Gitter verwendet, das dem Problem entsprechend skaliert (doppelte Ausdehnung der Gitterzellen in  $x$ -Richtung als in  $y$ -Richtung) und der Geometrie entsprechend verfeinert ist. Die Ergebnisse für die Komponenten des Spannungstensors werden auf einem uniformen Hilfsgitter gespeichert. Diese Werte werden dann linear interpoliert und dienen als Parameter in (8). Der Einfluss des Hilfsgitters wurde durch Verfeinerung untersucht. Zur Lösung von Gleichung (8) wird der in COMSOL implementierte Algorithmus zum Lösen von Eigenwertproblemen zu partiellen Differentialoperatoren in der schwachen Form verwendet. Dies ist ein Standard Finite-Elemente Algorithmus. Als Element wird Argyris-Quintic benutzt, da dies zu Testfunktionen führt, die global in  $H^2 \cap H_0^1$  liegen.

#### Belastung durch Schubspannung

Für eine Belastung durch eine reine Schubspannung können zumindest analytische Näherungslösungen gefunden werden, indem in der Energieformulierung ein Riesz-Ansatz zum Einsatz kommt. Dabei wird die Lösung als Fourierpolynom angesetzt, und dann die beste Approximation der Lösung im Raum dieser Fourierpolynome gesucht. Das entspricht einer Finite-Elemente Methode (auf ganz  $\Omega$ ) mit Fourierpolynomen als Basisfunktionen. Timoshenko und Gere geben in [15, pp382] mit dieser Methode einen näherungsweise Beulwert von 6.6 für die untersuchte Plattengeometrie an. Dabei wird der Beulwert definiert als

$$k = S^{crit} \cdot b^2 / \pi^2 D ,$$

wobei  $S^{crit}$  wieder auf die Länge des Randes bezogen ist. Andererseits ist in TGL 0–4114 (siehe [16]) ein Beulwert von  $5.34 + 4/2^2 = 6.34$  angegeben. Im vorliegenden Fall erhält man als numerische Lösung einen Beulwert von ungefähr 6.546 und die in Bild 6 dargestellten Eigenwerte und Eigenfunktionen:



**Bild 6. Schubbeule bei  $\lambda_0 \approx 0$  und Beulen des nächsten Eigenwerts  $\lambda_1 \approx -1.38$**

Fig. 6. Shear buckle at  $\lambda_0 \approx 0$  and buckles of the next eigenvalue  $\lambda_1 \approx -1.38$

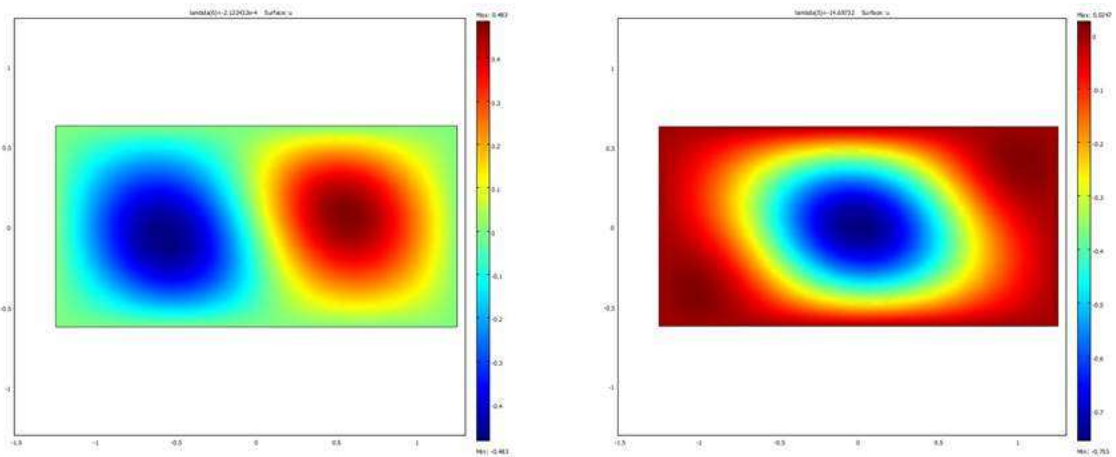
Die gute Übereinstimmung des numerischen Resultates mit bekannten Näherungen ist zwar augenscheinlich, andererseits lässt sich erkennen, dass für die untersuchte Plattengeometrie die zwei größten Eigenwerte sehr nahe beisammen liegen. Für reine Schubbelastung wird nur die Beugleichung numerisch gelöst, da die Komponenten des Spannungstensors explizit bekannt sind.

### Beulen durch Belastung der Klötze

Nun wird das Beulverhalten für Belastung infolge Klotzung untersucht. Dazu werden die Spannungskomponenten auf einem  $500 \times 500$  Gitter gespeichert - der Einfluss des Gitters wurde durch Variation der Anzahl der Gitterpunkte untersucht und kann als nichtig bezeichnet werden. Der numerische Aufwand für das Zwischenspeichern, auch auf sehr feinen Gittern, hält sich in Grenzen, da die Spannungskomponenten nur einmal berechnet und mit Konstanten skaliert werden. Diese Funktionen werden linear interpoliert und dienen als Parameter für Gleichung (8). Für den Beulwert wird die Kraftkomponente in  $x$ -Richtung mit jener für die bekannte gleichmäßige Belastung in  $x$ -Richtung, für welche sich ein exakter, kritischer Beulwert von 4 ergibt, verglichen. Wird der Beulwert

$$k_{Klotz} = N_{xx}^{crit} \frac{0.2}{b} \frac{b^2}{\pi^2 D},$$

betrachtet, so ergibt sich mit unserer numerischen Methode ein kritischer Beulwert von etwa  $k_{Klotz} = 3.61697$ .

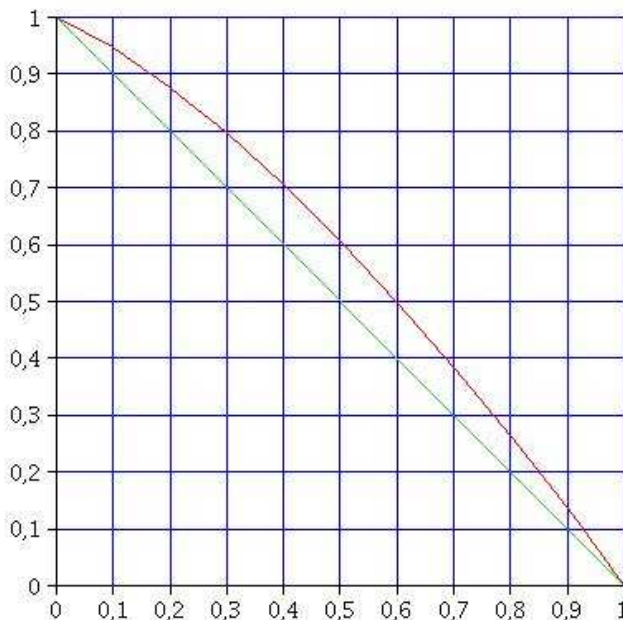


**Bild 7. Druckbeulen bei  $\lambda_0 \approx 0$  und Beule des nächsten Eigenwerts  $\lambda_1 \approx -14.69$**

Fig. 7. Compression buckles at  $\lambda_0 \approx 0$  and buckle of the next eigenvalue  $\lambda_1 \approx -14.69$

### 3.1 Resultate

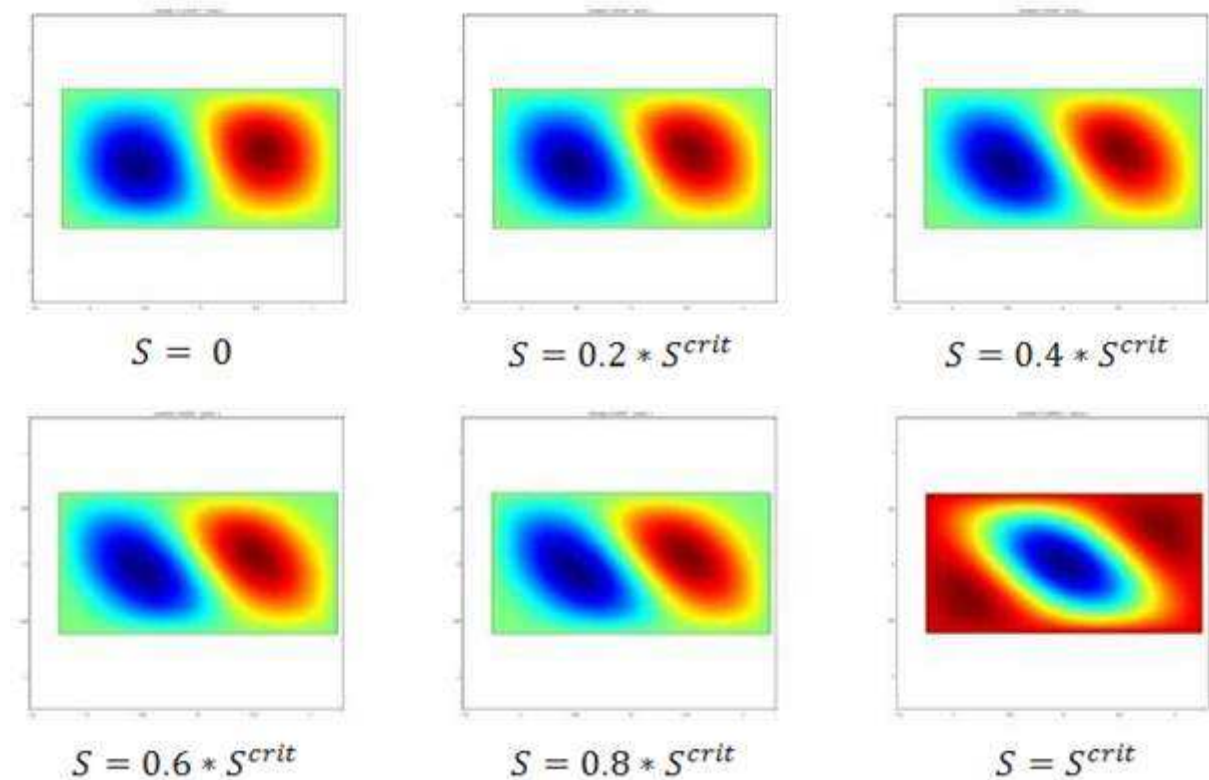
Nachfolgend wird nun jeweils die kritische Beullast bei einer Kombination aus Schubbelastung  $S$  und Belastung über die Klötze, wobei  $N_{yy} = \gamma N_{xx}$  gilt, berechnet. Dazu wird die Schubbelastung von 0 bis zur kritischen Beullast bei reiner Schubbeaufschlagung variiert, und jeweils die zugehörige kritische Last auf die Klötze ermittelt. Bild 8 zeigt die Ergebnisse.



**Bild 8. Interaktionsdiagramm für superponierte Schub- und Druckbeulen: Dunkerley-Gerade und nichtlineares, numerisches Ergebnis. Ordinate: Verhältnis von Schub  $S$  zu kritischem Schub  $S_{crit}$ ; Abszisse: Verhältnis von Druckkraft  $N_{xx}$  zu kritischer Druckkraft  $N_{xx}^{crit}$**

Fig. 8. Interaction diagram for superimposed shear and compression buckles: Dunkerley straight line and nonlinear, numerical result. Ordinate: ratio of shear  $S$  and critical shear  $S_{crit}$ . Abscissa: ratio of compressive force  $N_{xx}$  and critical compressive force  $N_{xx}^{crit}$

In Bild 9 sind einige der Beulbilder zu finden. Bis zu einer Schubbeaufschlagung von etwa  $0.95 \cdot S^{crit}$  gleichen sie fast der Beule bei Belastung infolge Klotzung. Erst dann dominiert die Schubbeule. Dies erscheint durchaus plausibel, da die ersten zwei Eigenformen der Schubbeule energetisch sehr nahe beisammen liegen und sich die zweite Eigenform der Schubbeule für eine Überlagerung mit der Druckbeule besser eignet.



**Bild 9. Variation der Schubspannung und Steigerung der Druckkraft bis zum Beulen**

Fig. 9. Variation of shear and increasing of compressive forces until buckling

#### 4 Die Dunkerley-Gerade als untere Schranke

Mit Hilfe des verallgemeinerten Dunkerley–Theorems (siehe Th. 2-2 in [12], Th. 3.1 in [17]) wird in diesem Abschnitt gezeigt, dass die Dunkerley–Gerade eine untere Schranke für die kritische Beullast ( $S$  als Funktion von  $N_{xx}$ , vgl. Bild 8) ist. Um die Anwendbarkeit dieses Satzes zu garantieren, werden zunächst einige mathematische Hilfsresultate benötigt.

**Lemma 1** Die Lösung von (1)-(4) erfüllt  $\sigma \in L^2(\Omega)$ .

Beweis: Die unstetigen Randdaten von  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  liegen nicht in  $H^{1/2}(\partial\Omega)$  und können daher nicht auf  $H^1(\Omega)$  fortgesetzt werden. Für das elliptische System (1)-(4) kann daher keine Standardtheorie verwendet werden.

Daher wird nun das zu (1)-(4) äquivalente Problem für die Airy'sche Spannungsfunktion  $F(x,y)$  betrachtet, wobei  $\begin{pmatrix} \partial_y^2 F & -\partial_x \partial_y F \\ -\partial_x \partial_y F & \partial_x^2 F \end{pmatrix} = \sigma$  gilt. Diese erfüllt die biharmonische Gleichung

$$\Delta^2 F = 0 \text{ in } \Omega; \quad F = f, \quad \frac{\partial F}{\partial n} = g \text{ auf } \partial\Omega. \quad (9)$$

Um die Randdaten  $f, g$  eindeutig aus (4) zu bestimmen, wird die Normierung  $F(0,0) = F_x(0,0) = F_y(0,0) = 0$  gewählt.  $f$  und  $g$  erhält man dann durch Integration der Randdaten  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  entlang von  $\partial\Omega$ . Das geforderte Kräfte- und Drehmomentgleichgewicht impliziert  $C^1$ -Kompatibilität der Randdaten  $F$  und  $\nabla F$  bei Integration über die geschlossene Kurve  $\partial\Omega$ .

Unter der (hier zutreffenden) Annahme  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} \in L^\infty(\partial\Omega)$  folgt  $f \in W^{2,\infty}(\partial\Omega) \subset H^{3/2}(\partial\Omega)$  und  $g \in W^{1,\infty}(\partial\Omega) \subset H^{1/2}(\partial\Omega)$ . Daher existiert eine  $H^2(\Omega)$ -Erweiterung  $F_0$  mit  $F_0|_{\partial\Omega} = f, \frac{\partial F_0}{\partial n}|_{\partial\Omega} = g$  (siehe §IV.4.3 in [14], §2.7 in [18]). Die übliche schwache Formulierung von (9) liefert  $\tilde{F} := F - F_0 \in H_0^2(\Omega)$ , und es folgt  $\sigma \in L^2(\Omega)$ .

Für die kritische Beullast  $S = S(N_{xx})$  gilt nun die untere Schranke:

**Theorem 2**  $S / S^{crit} \geq 1 - N_{xx} / N_{xx}^{crit}$  für  $0 \leq N_{xx} \leq N_{xx}^{crit}$ .

Beweis: Da  $\sigma$  laut (6) linear von  $N_{xx}$  und  $S$  abhängt, wird die Auslenkungsgleichung (7) zunächst als verallgemeinertes Eigenwertproblem geschrieben:

$$(A - \lambda(B_1 + B_2))u = 0, \quad (10)$$

wobei die  $L^2$ -symmetrischen Operatoren  $A := \Delta^2 \geq 0, \quad B_1 := -\frac{2\alpha}{D} S^{crit} \partial_x \partial_y,$   
 $B_2 := \frac{1-\alpha}{D} N_{xx}^{crit} (\sigma_x \partial_x^2 + 2\tau_{xy} \partial_x \partial_y + \sigma_y \partial_y^2)$  alle auf  $\Delta = \{v \in H^4(\Omega) \mid v|_{\partial\Omega} = \Delta v|_{\partial\Omega} = 0\}$  definiert sind. Hier bezeichnen  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  die Komponenten von  $\sigma_N$ , und  $\alpha \in (0,1)$  ist beliebig. Ziel sei es nun, den kleinsten positiven Eigenwert  $\lambda$  abzuschätzen.

Schritt 1: Mit Hilfe einer Poincaré Ungleichung gilt

$$\left| \langle B_1 u, u \rangle \right| = \frac{2\alpha}{D} S^{crit} \left| \int_{\Omega} (\partial_x \partial_y u) u \, d(x,y) \right| \leq C \langle Au, u \rangle \quad \forall u \in \Delta, \quad (11)$$

und analog für  $B_2$ .

Schritt 2: Es wird gezeigt, dass die quadratischen Funktionale  $\langle B_j u, u \rangle$  ( $j=1,2$ ) bez.  $\langle Au, u \rangle$  vollständig stetig sind. Laut der Definition in §3.3, [19] wird also eine endliche Menge von linearen Funktionalen  $l_i, 1 \leq i \leq k$  auf  $L^2(\Omega)$  gesucht, sodass für  $u$  mit  $l_i(u) = 0, (1 \leq i \leq k)$  die Konstante  $C$  in (11) beliebig klein gewählt werden kann.

$u \in L^2(\Omega)$  hat die Fourierdarstellung

$$u(x, y) = \sum_{m,n} u_{mn} \varphi_{mn}(x, y), \quad \text{mit} \quad \varphi_{mn} = \frac{1}{ab} e^{\frac{2\pi i m x}{a}} e^{\frac{2\pi i n y}{b}} \quad \text{und} \quad m, n \in \mathbb{Z}. \quad (12)$$

Gewählt wird  $\varepsilon = \frac{ab}{\pi^2 MN}$ , und es wird angenommen, dass  $u_{mn} = 0$  gilt, falls  $|m| < M$  und  $|n| < N$ . Dann gilt

$$\left| \langle \partial_x \partial_y u, u \rangle \right| \leq \frac{1}{ab} \sum_{m,n} \frac{2\pi|m|}{a} \frac{2\pi|n|}{b} |u_{mn}|^2 \leq \frac{\varepsilon}{a^2 b^2} \sum_{m,n} \frac{32\pi^4 m^2 n^2}{a^2 b^2} |u_{mn}|^2 \leq \varepsilon \langle \Delta^2 u, u \rangle,$$

und die vollständige Stetigkeit von  $\langle B_1 u, u \rangle$  bez.  $\langle Au, u \rangle$  folgt. Hierbei wurden die endlich vielen Funktionale  $l_{mn}(u) := \langle u, \varphi_{mn} \rangle$  mit  $|m| < M$  und  $|n| < N$  gewählt.

Für  $B_2$  wird nur der Term  $\sigma_x \partial_x^2$  betrachtet, da die zwei weiteren Terme analog analysiert werden können. Aus (12) folgt für den Fall  $u_{mn} = 0$  (falls  $|m| < M$  und  $|n| < N$ ) mit der Hölder Ungleichung:

$$ab \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \sum_{m,n} |u_{mn}| \leq \|(m^2 + n^2) u_{mn}\|_{l^2(\mathbb{Z}^2)} \left\| \frac{1}{m^2 + n^2} \right\|_{l^2(\{u_{mn} \neq 0\})} = \varepsilon_{MN} \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)},$$

wobei  $\varepsilon_{MN} = O\left(\frac{1}{M+N}\right)$  für große  $M$  bzw.  $N$  beliebig klein wird. Diese Abschätzung und die Hölder Ungleichung liefern

$$\left| \langle \sigma_x \partial_x^2 u, u \rangle \right| \leq \|\sigma_x\|_{L^2(\Omega)} \|\partial_x^2 u\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|\sigma_x\|_{L^2(\Omega)} \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 \frac{\varepsilon_{MN}}{ab},$$

und damit folgt das Ergebnis mit denselben Funktionalen wie zuvor.

Schritt 3: Nun sind die Voraussetzungen für das verallgemeinerte Dunkerley–Theorem erfüllt. Da der Operator  $A$  strikt positiv ist, folgt aus (11), für  $|\lambda_1|$  klein, auch  $A - \lambda_1 B_1 > 0$ . Aus der Definition von  $S^{crit}$  folgt natürlich, dass hierbei der kleinste positive Eigenwert  $\lambda_1 = 1/\alpha$  ist. Analog folgt aus der Definition von  $N_{xx}^{crit}$ , dass von  $A - \lambda_2 B_2 = 0$  der kleinste positive Eigenwert  $\lambda_2 = 1/(1-\alpha)$  ist. Und das Dunkerley–Theorem liefert für den kleinsten positiven Eigenwert von (10):  $1/\lambda \leq \alpha + (1-\alpha)$ , also  $\lambda \geq 1$ .

Es wurde gezeigt, dass das Randkräfte-Paar  $(\lambda(1-\alpha)N_{xx}^{crit}, \lambda\alpha S^{crit})$  nur für  $\lambda \geq 1$  zu einem Null-Eigenwert in (7), und damit zur Ausbildung einer Beule führen kann.  $\lambda \geq 1$  besagt, dass dieser Punkt der kritischen Beullastkurve  $S(N_{xx})$  "oberhalb" der Dunkerley-Geraden,  $\{(1-\alpha)N_{xx}^{crit}, \alpha S^{crit} \mid \alpha \in [0,1]\}$  liegt.  $\square$

**Korollar 3** Für die Summe aus zwei beliebigen Kantenbelastungen einer ebenen Platte liegt, unter der Voraussetzung der Kraft- und Drehmomentbalance, die kritische Last über der Geraden, die die kritischen Lasten der einzelnen Belastungsfälle verbindet (vgl. Bild 8). Dies gilt jedenfalls, wenn die Platte konvex, und der Rand der Platte glatt ist. Außerdem gilt die Aussage für Polyeder, wenn, wie in unserem Fall, die Belastungen in Umgebungen von Ecken geeignete Kompatibilitätsbedingungen erfüllen.

Beweis: Der Beweis von Theorem 2 gilt unabhängig von der genauen Form der Belastungen, da nur die Struktur der entsprechenden Operatoren relevant ist. Entscheidend ist also, dass  $\sigma$  in  $L^2(\Omega)$  liegt. In der Praxis ist es naheliegend, dass  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} \in L^\infty(\partial\Omega)$  sind. Damit ist der entscheidende Punkt die Existenz einer  $H^2(\Omega)$ -Erweiterung  $F_0$  mit  $F_0|_{\partial\Omega} = f$ ,  $\frac{\partial F_0}{\partial n}|_{\partial\Omega} = g$ . Dies ist sichergestellt, wenn der Rand der Platte  $\partial\Omega$  glatt genug ist und lokal auf einer Seite von  $\Omega$  liegt. Falls die Platte (eine endliche Anzahl von) Ecken hat, müssen dort bestimmte Kompatibilitätsbedingungen erfüllt sein. Einfach sicherzustellen ist dies, indem man wie hier verlangt, dass die Druckbelastungen in der Umgebung von Ecken identisch verschwinden, und die Schubbelastung konstant ist.

## 5 Conclusio

Verbundkonstruktionen, welche die Vorzüge unterschiedlicher Materialien vereinen, erfreuen sich aufgrund der tendenziellen Entwicklung von ressourcenbasierten zu wissensbasierten Bauweisen wachsendem Interesse. Dies gilt auch für die bauphysikalisch äußerst günstigen Holz-Glas-Verbundscheiben, die zudem den bisher vorwiegend füllenden Baustoff Glas statisch wirksam einsetzbar machen.

Die im Rahmen von [5] publizierten Berechnungs- und Bemessungskonzepte basieren zum Großteil auf bestehenden Normen. Der wesentlichste Glasnachweis – der Stabilitätsnachweis der Scheibe – musste jedoch bisher unter Zuhilfenahme der Dunkerley-Geraden geführt werden, ohne den daraus resultierenden Fehler abschätzen zu können oder (mathematische) Gewissheit zu haben, dass mit der Dunkerley-Geraden ein Instrument zur Verfügung steht, welches stets auf der sicheren Seite zu liegen kommt.

Im vorliegenden Aufsatz wurden diese offenen Fragestellungen aufgegriffen und durch mathematische und ingenieurmäßige, wissenschaftliche Ansätze behandelt. Es kann wie folgt resümiert werden:

Da im untersuchten Fall die numerisch ermittelte kritische Beullast nicht viel grösser ist als die Beullast, die sich aus der Dunkerley-Geraden ableitet, wird vorgeschlagen als Bemessungsgrundlage die Dunkerley'sche Gerade zu verwenden, da diese ferner stets auf der sicheren Seite zu liegen kommt. Sind also die kritischen Beullasten respektive Beulwerte

für die einzelnen Belastungsfälle bekannt, so kann man unmittelbar eine untere Schranke für die Beullast bei kombinierter Belastung angeben, während numerische Berechnungen eine genaue Fehlerabschätzung nötig machen. Dieser Aufwand erscheint, zumindest für die untersuchte Rechteckplatte mit einem Seitenverhältnis von 2:1, nur für äußerst gewichts- oder materialeinsatzoptimierte Anwendungen gerechtfertigt.

## Literatur

- [1] G. NEUBAUER, P. SCHOBBER Weiterentwicklung und Herstellung von Holz-Glas-Verbundkonstruktionen durch statisch wirksames Verkleben von Holz und Glas zum Praxiseinsatz im Holzhausbau. Endbericht zum Impulsprojekt V2 des KInd Holz Technologie, Wien, 2008.
- [2] J. HAMM Tragverhalten von Holz und Holzwerkstoffen im statischen Verbund mit Glas, Dissertation: EPF Lausanne, 1999.
- [3] P. NIEDERMAIER Holz-Glas-Verbundkonstruktionen. Ein Beitrag zur Aussteifung von filigranen Holztragwerken, Dissertation: TU München, 2005.
- [4] T. EDL Entwicklung von wandartigen verklebten Holz-Glas-Verbundelementen und Beurteilung des Tragverhaltens als Aussteifungsscheibe, Dissertation: TU Wien, 2008.
- [5] W. HOCHHAUSER, ET AL. Holz-Glas-Verbundkonstruktionen: State of the Art, Forschungsbericht, Studentische Arbeiten. Endbericht zum Forschungsprojekt: "Holz-Glas-Verbundkonstruktionen: Berechnung und Bemessungskonzept". Wien, 2011.
- [6] TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN, ÖSTERREICHISCHES PATENTAMT Anmeldenummer A588/2011.
- [7] DIN 4114-1 UND DIN 4114-2 Stahlbau; Stabilitätsfälle (Knickung, Kippung, Beulung), Ausgabe Teil 1: 1952-07, Ausgabe Teil 2: 1953-02.
- [8] O. ENGLHARDT Flächentragwerke aus Glas - Tragverhalten und Stabilität, Dissertation: Universität für Bodenkultur Wien, 2007.
- [9] G. BAKER, M.N. PAVLOVIĆ Elastic stability of simply supported rectangular plates under locally distributed edge forces, *Journal of Applied Mechanics* 49, (1982), 177–179.
- [10] P. JANA, K. BHASKAR Stability analysis of simply-supported rectangular plates under non-uniform uniaxial compression using rigorous and approximate plane stress solutions *Thin-Walled Structures* 44 (2006), 507–516.
- [11] Y.G. LIU, M.N. PAVLOVIĆ A generalized analytical approach to the buckling of simply-supported rectangular plates under arbitrary loads *Engineering Structures* 30 (2008), 1346–1359.
- [12] T. TARNAI The Southwell and the Dunkerley theorems, pp. 141–185 in *Summation theorems Structural Stability* (T. Tarnai ed.), CISM Courses and Lecture No. 354, Springer, Wien, 1995.
- [13] W. HOCHHAUSER Ein Beitrag zur Berechnung und Bemessung von geklebten und geklotzten Holz-Glas-Verbundscheiben, Dissertation: TU Wien, 2011.
- [14] R. DAUTRAY, J.-L. LIONS *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology - vol 2. Functional and Variational Methods*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (2000).
- [15] S.P. TIMOSHENKO, J.M. GERE *Theory of elastic stability*, 2<sup>nd</sup> edition, McGRAW-HILL, 1961.



- [16] G. BÜRGERMEISTER, H. STEUP, H. KRETZSCHMAR Stabilitätstheorie Teil II — mit Erläuterungen zu den Knick- und Beulvorschriften, Akademie Verlag Berlin, 1963.
- [17] T. TARNAI Summation theorems concerning critical loads of bifurcation, pp. 23–58 in Structural Stability in Engineering Practice (L. Kollár ed.), Taylor & Francis, London, 1999.
- [18] F. BREZZI, G. GILARDI Fundamentals of P.D.E. for numerical analysis, preprint n. 446 of Istituto di Analisi Numerica, Pavia, (1984).
- [19] H.F. WEINBERGER Variational Methods for Eigenvalue Approximation, CBMS-NSF Reg. Conf. Ser. in Appl. Math. No. 15, SIAM, Philadelphia, 1974.